ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

math.gr

Απόλυτη τιμή

math.gr

- Ορίζουμε ως **απόλυτη τιμή** ενός αριθμού x και την συμβολίζουμε $|x|$, τον ίδιο τον αριθμό αν αυτός είναι θετικός ή μηδέν και τον αντίθετό του αν αυτός είναι αρνητικός. Δηλαδή

$$|x| \overset{\text{ορ}}{=} \begin{cases} x, & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

- Γεωμετρικά ερμηνεύεται ως η απόσταση του σημείου $M(x)$ από την αρχή $O(0)$ του πραγματικού άξονα.

Δύναμη αριθμού με εκθέτη ακέραιο

math.gr

- **Η Δύναμη** με βάση $\alpha \in \mathbb{R}$ και εκθέτη $\kappa \in \mathbb{Z}$, συμβολίζεται α^κ και ορίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \alpha^0 = 1 \quad (\alpha \neq 0) \\ \alpha^1 = \alpha \\ \alpha^\kappa = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\kappa \text{ παράγοντες}} \quad (\kappa > 1) \\ \alpha^\kappa = \frac{1}{\alpha^{-\kappa}} \quad (\alpha \neq 0,\ \kappa < 0) \end{cases}$$

- **Ιδιότητες Δυνάμεων**

$\boxed{\alpha^\nu \alpha^\mu = \alpha^{\nu+\mu}}$ $\boxed{\alpha^\nu \beta^\nu = (\alpha\beta)^\nu}$ $\boxed{(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\nu\mu}}$ $\boxed{\dfrac{\alpha^\nu}{\alpha^\mu} = \alpha^{\nu-\mu}}$ $\boxed{\dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}$ $\boxed{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\nu}$

- **Παρατηρήσεις** $(\nu \in \mathbb{N})$

$\boxed{1^\nu = 1}$ $\boxed{\begin{matrix} 0^\nu = 0 \\ (\nu \neq 0) \end{matrix}}$ $\boxed{10^\nu = 1\underbrace{0000\cdots0}_{\nu \text{ μηδενικά}}}$ $\boxed{10^{-\nu} = 0.\underbrace{0000\cdots01}_{\nu \text{ ψηφία}}}$ $\boxed{(-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ άρτιος ακέραιος} \\ -1, & k \text{ περιττός ακέραιος} \end{cases}}$

Ρίζες

math.gr

- **Τετραγωνική ρίζα** (ή απλώς **ρίζα**) ενός θετικού αριθμού $\alpha > 0$, λέγεται ο θετικός αριθμός $\beta > 0$, ο οποίος αν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον α και συμβολίζεται $\sqrt{\alpha}$. Ορίζουμε $\sqrt{0} = 0$
Δηλαδή $\sqrt{\alpha} = \beta \overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} \beta^2 = \alpha$, όπου $\alpha, \beta \geq 0$
Δηλ. είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha \quad (\alpha \geq 0)$.

- **Ιδιότητες Ριζών**

$\boxed{\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}$ $\boxed{\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}}$ $\boxed{(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha}$ $\boxed{\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|}$ $\boxed{\sqrt{\alpha^2\beta} = |\alpha|\sqrt{\beta}}$

Μονώνυμα

math.gr

- **Αριθμητική παράσταση** είναι μία μαθηματική έκφραση (παράσταση) που περιέχει πράξεις με αριθμούς.
π.χ. $5 \cdot 7^2 - 3 \cdot \dfrac{2}{3^2 - 1}$

- **Αλγεβρική παράσταση** είναι μία μαθηματική έκφραση (παράσταση) που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές.

Εξισώσεις

math.gr

- **Εξίσωση** λέγεται κάθε ισότητα που συνδέει γνωστές με άγνωστες ποσότητες.
- **Πρωτοβάθμια Εξίσωση** λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta = 0$
- **Εξίσωση με ένα άγνωστο**, λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μόνο μία άγνωστη μεταβλητή.
- **Ρίζα** ή **λύση** μιας εξίσωσης, με ένα άγνωστο, λέγεται κάθε αριθμός που την επαληθεύει.
- μια εξίσωση λέγεται
  - **αδύνατη** όταν δεν έχει λύση.
  - **αόριστη** όταν έχει άπειρες λύσεις.
  - **ταυτότητα** στο $A \subset \mathbb{R}$ όταν κάθε στοιχείο του A, είναι λύση της.

Μέθοδος επίλυσης πρωτοβάθμιων Εξισώσεων - Ανισώσεων

math.gr

Μέθοδος επίλυσης εξισώσεων πρώτου βαθμού

1. Βγάζουμε παρενθέσεις
2. πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το ΕΚΠ των παρονομαστών
3. απαλείφουμε παρονομαστές κάνοντας απλοποιήσεις
4. Αν χρειαστεί επαναλαμβάνουμε τα βήματα $(1) - (3)$
5. Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους (όποιος προσθετέος αλλάζει μέλος αλλάζει και πρόσημο)
6. Κάνουμε τις προσθαφαιρέσεις
7. τώρα η εξίσωση έχει πάρει τη μορφή $\alpha \cdot x = -\beta$
   - αν $\alpha \neq 0$ τότε υπάρχει μοναδική λύση $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$
   - αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ τότε είναι ταυτότητα
   - αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$ τότε είναι αδύνατη

Μέθοδος επίλυσης ανισώσεων πρώτου βαθμού

Όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε τους όρους μιας ανίσωσης με αρνητικό αριθμό, η ανίσωση αλλάζει φορά, κατά τα άλλα η διαδικασία είναι παρόμοια με της εξίσωσης.

Παρατήρηση

Οι πρωτοβάθμιες εξισώσεις έχουν <u>ακριβώς μία λύση</u>, <u>καμία λύση</u> ή <u>κάθε (επιτρεπτό) αριθμό ως λύση</u>.

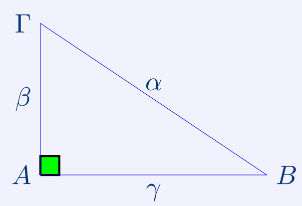
Πυθαγόρειο Θεώρημα

math.gr

Πυθαγόρειο Θεώρημα (ορθό)

Το τετράγωνο της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του.

Δηλαδή $\boxed{\widehat{A} = 90^\circ \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$



Άρα $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$

Αντίστροφο Πυθαγόρειο Θεωρήματος

Αν σ' ενα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

Δηλαδή $\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ}$

Παρατηρήσεις

- Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο γνωρίζουμε δύο πλευρές, τότε μπορούμε να βρούμε και την τρίτη πλευρά.

Συναρτήσεις

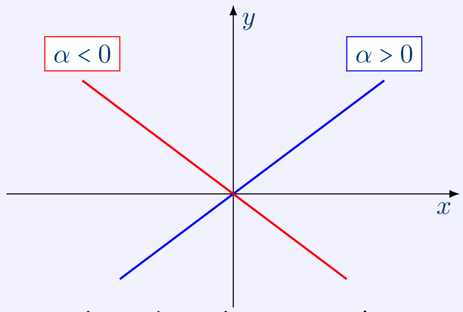
math.gr

- **Συνάρτηση** f με **πεδίο ορισμού** το σύνολο $A \neq \varnothing$ και **πεδίο τιμών** το σύνολο $B \neq \varnothing$ λέγεται κάθε νόμος ή διαδικασία βάσει του οποίου κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο ένα στοιχείο $y \in B$. Τότε γράφουμε, συνάρτηση $f : A \to B$ με τύπο $y = f(x)$ ή $x \overset{f}{\mapsto} y$.
- Γενικά το x λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και το y **εξαρτημένη μεταβλητή**.
  Το y λέγεται **εικόνα του προτύπου** x μέσω της f ή **τιμή της** f στο x.
- **Εύρεση πεδίου ορισμού** της συνάρτησης f, $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$
- **Γραφική παράσταση** της συνάρτησης f/A, $\quad C_f \overset{\text{ορ}}{=} \{$ σημεία $M(x,y) : x \in A,\ y = f(x)\}$.
- Ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f/A ακριβώς τότε όταν $\alpha \in A$ και $\beta = f(\alpha)$.
- Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f/A με τον άξονα $y'y$ βρίσκεται θέτοντας στον τύπο της $x = 0$. Αν $0 \notin A$ τότε δεν έχουν κοινά σημεία.
- Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f/A με τον άξονα $x'x$ βρίσκονται λύνοντας την εξίσωση $f(x) = 0$ στο A.
- Τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g των συναρτήσεων f/A, g/B βρίσκονται λύνοντας την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο $A \cap B$.

Ανάλογα ποσά

math.gr

- Δυο ποσά x, y λέγονται ανάλογα όταν το πηλίκο τους διατηρείται σταθερό, δηλαδή $\dfrac{x}{y} = \alpha$
  όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός, διαφορετικός του μηδενός, που λέγεται **συντελεστής αναλογίας**.
- Η γραφική παράσταση δύο ανάλογων ποσών είναι σημεία μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

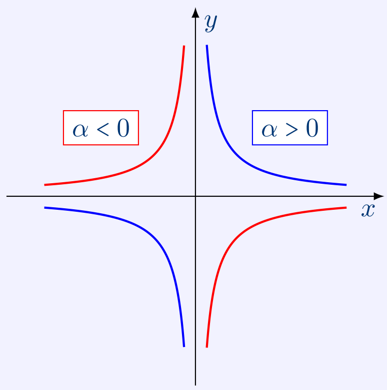


Με άλλα λόγια, δύο ποσά λέγονται ανάλογα, εάν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, ώστε όταν οι τιμές του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

math.gr

- Δυο ποσά x, y λέγονται αντιστρόφως ανάλογα όταν το γινόμενό τους τους διατηρείται σταθερό, δηλαδή $x \cdot y = \alpha$
  όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός, διαφορετικός του μηδενός.
- Με άλλα λόγια, δύο ποσά λέγονται αντιστρόφως ανάλογα, εάν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, που όταν οι τιμές του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό.
- Η γραφική παράσταση δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών είναι ένα σύνολο σημείων καμπύλης με δύο κλάδους που λέγεται υπερβολή.

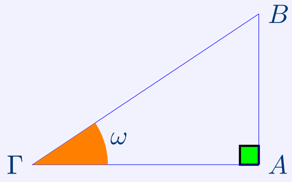


Τριγωνομετρικοί αριθμοί

math.gr

Έστω ω οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου.
Ορίζουμε:

- $\boxed{\text{ημ}\,\omega = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}} = \dfrac{AB}{B\Gamma}$
- $\boxed{\text{συν}\,\omega = \dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}} = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}$
- $\boxed{\text{εφ}\,\omega = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$



συνήθεις τριγωνομετρικοί αριθμοί			
μοίρες	30°	45°	60°
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

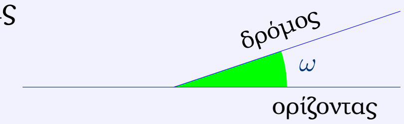
Τριγωνομετρικές Ταυτότητες - Τιμές

$\boxed{\text{ημ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1}$ $\boxed{\text{εφ}\,\omega = \dfrac{\text{ημ}\,\omega}{\text{συν}\,\omega}}$ $\boxed{0 < \text{ημ}\,\omega < 1}$ $\boxed{0 < \text{συν}\,\omega < 1}$ $\boxed{0 < \text{εφ}\,\omega < +\infty}$

Κλίση ευθείας

math.gr

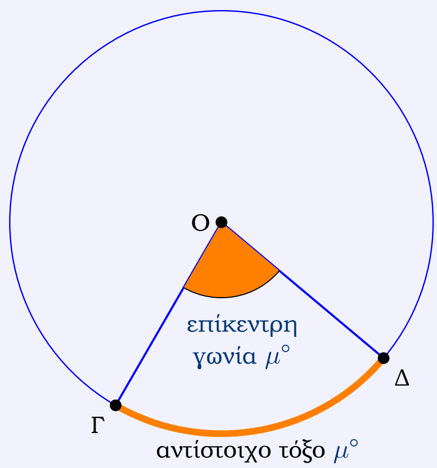
- Κλίση μιας ευθείας (ϵ) λέγεται η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία (ϵ) με τον άξονα $x'x$.
- Λέμε ότι η κλίση ενός δρόμου είναι $\alpha\%$ όταν $\text{εφ}\,\omega = \dfrac{\alpha}{100}$



Επίκεντρη γωνία

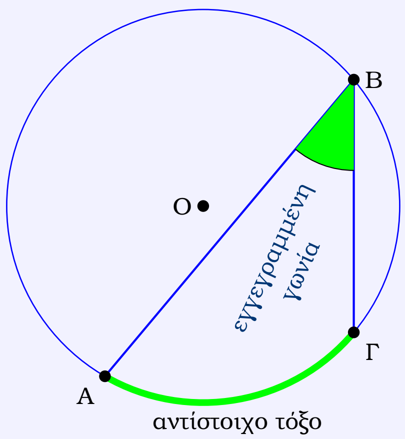
math.gr

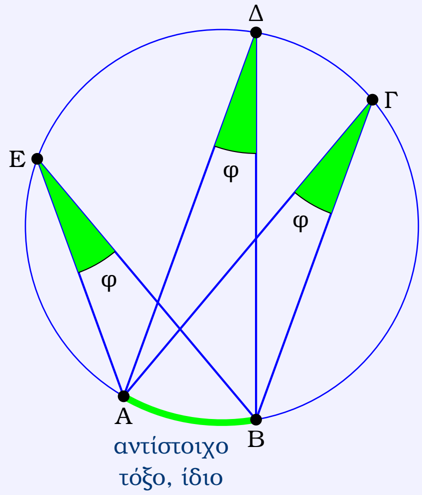
- **Επίκεντρη γωνία** σε ένα κύκλο λέγεται κάθε γωνία που έχει κορυφή το κέντρο του κύκλου.
  Το τόξο του κύκλου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών της γωνίας λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης γωνίας.
- Σε ένα κύκλο η σε ίσους κύκλους, ίσες επίκεντρες γωνίες έχουν ίσα τα αντίστοιχα τόξα τους κι αυτά έχουν ίσες τις αντίστοιχες χορδές τους.
- **Σχέση τόξου και επίκεντρης γωνίας**: Ένα τόξο λέμε ότι είναι τόξο μ° όταν αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία μ°
- Δύο τόξα μ° είναι ίσα όταν είναι τόξα του ίδιου κύκλου η ίσων κύκλων.

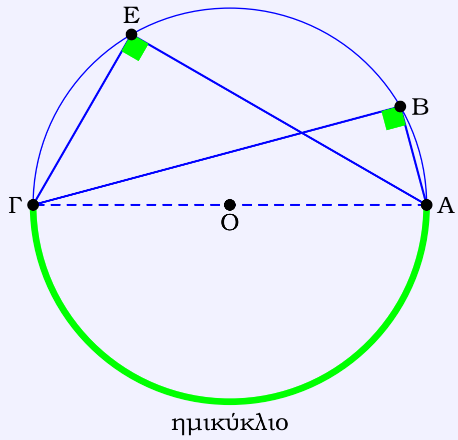


Εγγεγραμμένη γωνία

math.gr







Εγγεγραμμένη γωνία σε ένα κύκλο λέγεται κάθε γωνία που η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.

Εγγεγραμμένες γωνίες του ίδιου κύκλου η ίσων κύκλων που βαίνουν στο ίδιο τόξο η σε ίσα τόξα είναι ίσες.

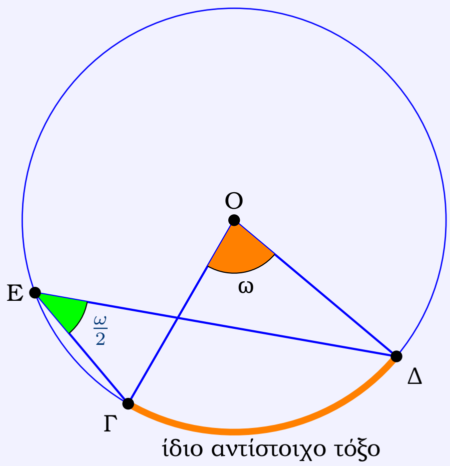
Εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Το τόξο του κύκλου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών της γωνίας λέγεται αντίστοιχο τόξο της εγγεγραμμένης γωνίας. Ακόμη λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία **βαίνει στο τόξο** αυτό.

Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας

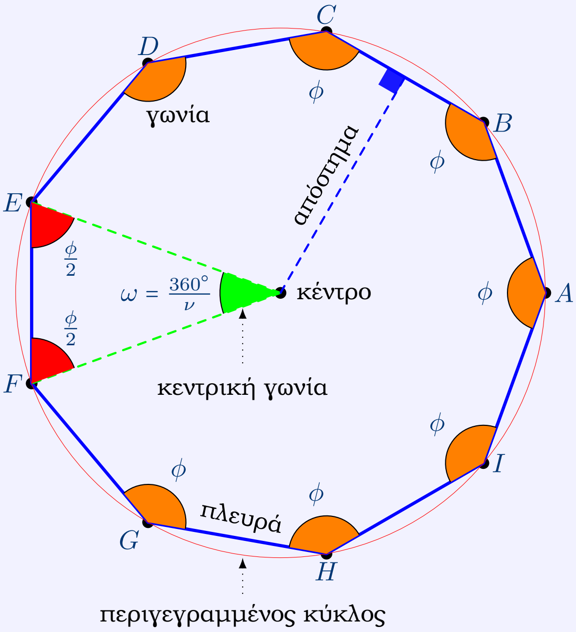
math.gr

Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας: Η εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που έχει το ίδιο αντίστοιχο τόξο.



Κανονικό πολύγωνο math.gr

- **Κανονικό πολύγωνο** λέγεται το πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.
- **Κεντρική γωνία** ενός κανονικού ν-γώνου λέγεται η γωνία υπό την οποία το κέντρο του βλέπει μια πλευρά του και είναι $\boxed{\widehat{\omega} = \frac{360°}{\nu}}$
- **Γωνία** ενός κανονικού πολυγώνου λέγεται η γωνία δύο διαδοχικών πλευρών του.
- Η γωνία φ ενός κανονικού πολυγώνου και η κεντρική του γωνία ω είναι γωνίες παραπληρωματικές, δηλαδή $\boxed{\widehat{\omega} + \widehat{\phi} = 180°}$.
- **Περιγεγραμμένος κύκλος** ενός κανονικού πολυγώνου λέγεται ο κύκλος που διέρχεται απ' όλες τις κορυφές του.



- **Κέντρο** ενός κανονικού πολυγώνου λέγεται το κέντρο του περιγεγραμμένου του κύκλου.
- **Απόστημα** ενός κανονικού πολυγώνου λέγεται η απόσταση του κέντρου του από μια πλευρά του.

Τόξα - Κυκλικοί τομείς math.gr

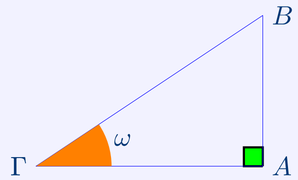
- **Ακτίνιο** (ή **rad**) είναι η γωνία που όταν καταστεί επίκεντρη σε έναν κύκλο αντιστοιχεί σε τόξο μήκους ίσου με την ακτίνα του.
- **Κυκλικός τομέας** λέγεται το γεωμετρικό σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία ενός κυκλικού δίσκου και μιας επίκεντρης γωνίας του.
- Τα μεγέθη που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα είναι ανάλογα. Οι παρούσες τιμές αφορούν τόξο ίσο με ένα κύκλο.

τόξο	μοίρες	ακτίνια	μήκος τόξου	εμβαδό κυκλικού τομέα
1 κύκλος	360°	2π rad	$2\pi\rho$	$\pi\rho^2$

Απόδειξη τριγωνομετρικής ταυτότητας math.gr

Έστω ω οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου.
Ορίζουμε:

- $\eta\mu\,\omega = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \dfrac{AB}{B\Gamma}$
- $\sigma\upsilon\nu\,\omega = \dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}$
- $\varepsilon\varphi\,\omega = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$



Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

- $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = \left(\frac{AB}{B\Gamma}\right)^2 + \left(\frac{A\Gamma}{B\Gamma}\right)^2 = \frac{AB^2}{B\Gamma^2} + \frac{A\Gamma^2}{B\Gamma^2} = \frac{AB^2 + A\Gamma^2}{B\Gamma^2} = \frac{B\Gamma^2}{B\Gamma^2} = 1$ άρα $\boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$
- Επομένως $\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega$ και $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$
- $\frac{\eta\mu\,\omega}{\sigma\upsilon\nu\,\omega} = \frac{\frac{AB}{B\Gamma}}{\frac{A\Gamma}{B\Gamma}} = \frac{AB \cdot \cancel{B\Gamma}}{\cancel{B\Gamma} \cdot A\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} = \varepsilon\varphi\,\omega$ άρα $\boxed{\varepsilon\varphi\, x = \frac{\eta\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x}}$

Εμβαδά επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων

math.gr